

四次对称群 S_4 的几何意义

张圣贵

Email: zsg11@fjnu.edu.cn

福建师范大学 数学系

September 12, 2008



内容提要

1 S_4 的几何直观

内容提要

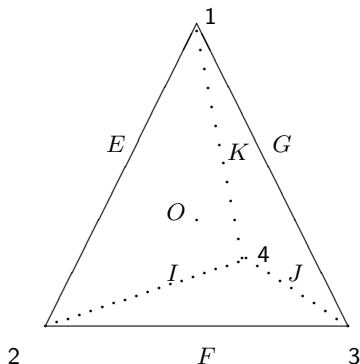
- 1 S_4 的几何直观
- 2 S_4 的的子群的几何直观

内容提要

- 1 S_4 的几何直观
- 2 S_4 的的子群的几何直观
- 3 正四面体的旋转变换群 A_4 及其乘法表

S_4 的几何直观

如下图正四面体1234, E, F, G, I, J, K 分别为边12, 23, 31, 24, 43, 41的中点, 重心为 O .



保持直线1 O 不动的旋转变换: $(234), (243)$.

保持直线3 O 不动的旋转变换: $(124), (142)$.

保持直线4 O 不动的旋转变换: $(123), (132)$.

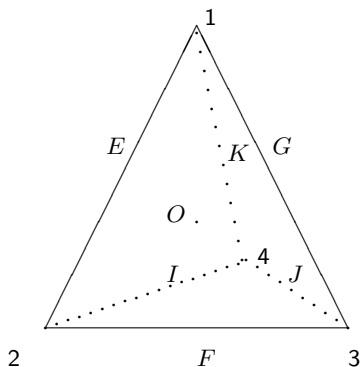
保持直线 IG 不动的旋转变换: $(13)(24)$.

保持直线 EJ 不动的旋转变换: $(12)(34)$.

保持直线 FK 不动的旋转变换: $(14)(23)$.

保持所有点不动的变换: (1) .

S_4 的几何直观



保持平面1O4不动的反射变换: (23).

保持平面1O2不动的反射变换: (34).

保持平面3O4不动的反射变换: (12).

保持平面2O4不动的反射变换: (13).

保持平面2O3不动的反射变换: (14).

保持平面1O3不动的反射变换: (24).

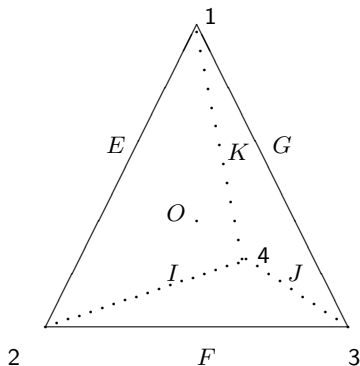
仅保持O不变的变换: (1234), (1324),
(1432), (1423), (1342), (1243).

S_4 的几何直观

$$\begin{aligned} S_4 = & \{(1), \\ & (12), (13), (14), (23), (24), (34), \\ & (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), \\ & (12)(34), (13)(24), (14)(23), \\ & (1234), (1324), (1432), (1423), (1342), (1243)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 = & \{(1), \\ & (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), \\ & (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \end{aligned}$$

S_4 的子群的几何直观



保持直线1O不动的子群:

$$H_1 = \langle (234) \rangle = \{(1), (234), (243)\};$$

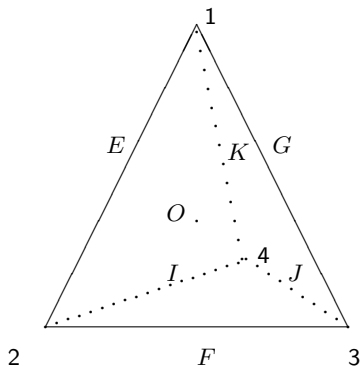
$$\begin{aligned} G_1 &= \langle (23), (234) \rangle \\ &= \{(1), (23), (24), (34), (234), (243)\}. \end{aligned}$$

保持直线2O不动的子群:

$$H_2 = \langle (134) \rangle = \{(1), (134), (143)\};$$

$$\begin{aligned} G_2 &= \langle (13), (134) \rangle \\ &= \{(1), (13), (14), (34), (134), (143)\}. \end{aligned}$$

S_4 的子群的几何直观



保持直线3O不动的子群:

$$H_3 = \langle (124) \rangle = \{(1), (124), (142)\};$$

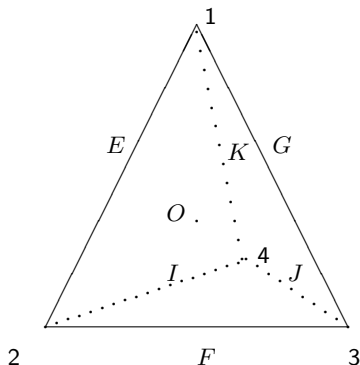
$$\begin{aligned} G_3 &= \langle (12), (124) \rangle \\ &= \{(1), (12), (14), (24), (124), (142)\}. \end{aligned}$$

保持直线4O不动的子群:

$$H_4 = \langle (123) \rangle = \{(1), (123), (132)\};$$

$$\begin{aligned} G_4 &= \langle (12), (123) \rangle \\ &= \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}. \end{aligned}$$

S_4 的子群的几何直观



保持平面1O4不动的子群:

$$P_1 = \langle 23 \rangle = \{(1), (23)\}$$

保持平面1O2不动的子群:

$$P_2 = \langle 34 \rangle = \{(1), (34)\}.$$

保持平面3O4不动的子群:

$$P_3 = \langle 12 \rangle = \{(1), (12)\}.$$

保持平面2O4不动的子群:

$$P_4 = \langle 13 \rangle = \{(1), (13)\}.$$

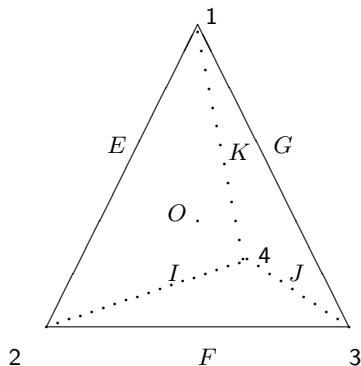
保持平面2O3不动的子群:

$$P_5 = \langle 14 \rangle = \{(1), (14)\}.$$

保持平面1O3不动的子群:

$$P_6 = \langle 24 \rangle = \{(1), (24)\}.$$

S_4 的子群的几何直观



保持直线 IG 不动的子群:

$$P_7 = \langle (13)(24) \rangle = \{(1), (13)(24)\}.$$

保持直线 EJ 不动的子群:

$$P_8 = \langle (12)(34) \rangle = \{(1), (12)(34)\}.$$

保持直线 FK 不动的子群:

$$P_9 = \langle (14)(23) \rangle = \{(1), (14)(23)\}.$$

仅保持重心 O 不变的4阶循环子群:

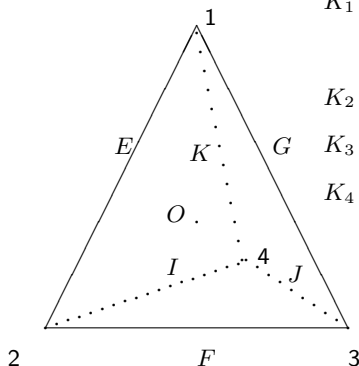
$$C_1 = \langle (1234) \rangle = \{(1), (1234), (1324), (4321)\},$$

$$C_2 = \langle (1342) \rangle = \{(1), (1342), (1423), (2431)\},$$

$$C_3 = \langle (1324) \rangle = \{(1), (1324), (1234), (4231)\}.$$

S_4 的子群的几何直观

仅保持重心 O 不变的4阶非循环交换子群:



$$K_1 = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$$

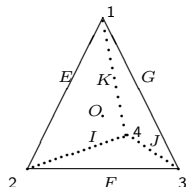
$$= \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

$$K_2 = \langle (12), (34) \rangle = \{(1), (12), (34), (12)(34)\},$$

$$K_3 = \langle (13), (24) \rangle = \{(1), (13), (24), (13)(24)\},$$

$$K_4 = \langle (14), (23) \rangle = \{(1), (14), (23), (14)(23)\}.$$

S_4 的子群的几何直观



仅保持重心 O 不变的8阶非交换子群:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \langle (12)(34), (1234) \rangle \\
 &= \{(1), (1234), (13)(24), (12)(34), (14)(23), (4321), (13), (24)\}, \\
 N_2 &= \langle (13)(24), (1342) \rangle \\
 &= \{(1), (1342), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (2431), (14), (23)\}, \\
 N_3 &= \langle (13)(24), (1324) \rangle \\
 &= \{(1), (1324), (12)(34), (14)(23), (13)(24), (12), (34), (4231)\}.
 \end{aligned}$$

S_4 的子群的几何直观

仅保持重心 O 不变的所有偶置换组成的 12 阶子群

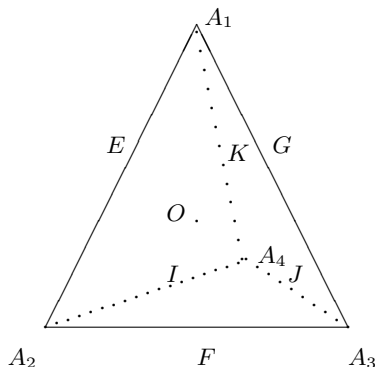
$$A_4 = \{(1), (123), (132), (124), (142), (134), (142), (234), (243), \\ (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

保持所有点不变的平凡子群: $\{(1)\}$.

仅保持重心 O 不变的所有置换组成的平凡子群:

$$S_4 = \{(1) \\ (12), (13), (14), (23), (24), (34), \\ (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), \\ (12)(34), (13)(24), (14)(23) \\ (1234), (1324), (1432), (1423), (1342), (1243)\}$$

正四面体的旋转变换群 A_4 及其乘法表



O 为正四面体的重心,

σ_i 是以 A_iO 为轴逆时针旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 的旋转变换,
 $i = 1, 2, 3, 4$.

τ_1 是绕线段 A_1A_2 的中点与线段 A_3A_4 的中点
 连线 EJ 旋转 π 的旋转变换,

τ_2 是绕线段 A_1A_4 的中点与线段 A_2A_3 的中点
 连线 KF 旋转 π 的旋转变换,

τ_3 是绕线段 A_1A_3 的中点与线段 A_2A_4 的中点
 连线 GI 旋转 π 的旋转变换.

正四面体的旋转群 $H = \{I, \sigma_1, \sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_2^2, \sigma_3, \sigma_3^2, \sigma_4, \sigma_4^2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$

正四面体的旋转变换群 A_4 及其乘法表

它的乘法表:

$\cdot$	I	σ_1	σ_1^2	σ_2	σ_2^2	σ_3	σ_3^2	σ_4	σ_4^2	τ_1	τ_2	τ_3
I	I	σ_1	σ_1^2	σ_2	σ_2^2	σ_3	σ_3^2	σ_4	σ_4^2	τ_1	τ_2	τ_3
σ_1	σ_1	σ_1^2	I	σ_4	τ_2	σ_2^2	τ_3	σ_3^2	τ_1	σ_2	σ_3	σ_4
σ_1^2	σ_1^2	I	σ_1	τ_1	σ_3	τ_2	σ_4	τ_3	σ_2	σ_4^2	σ_2^2	σ_3^2
σ_2	σ_2	σ_3^2	τ_2	σ_2^2	I	σ_4^2	τ_1	σ_1^2	τ_3	σ_1	σ_4	σ_3
σ_2^2	σ_2^2	τ_1	σ_4	I	σ_2	τ_3	σ_1	τ_2	σ_3	σ_3^2	σ_1^2	σ_4^2
σ_3	σ_3	σ_4^2	τ_3	σ_1^2	τ_1	σ_3^2	I	σ_2^2	τ_2	σ_4	σ_1	σ_2
σ_3^2	σ_3^2	τ_2	σ_2	τ_3	σ_4	I	σ_3	τ_1	σ_1	σ_2^2	σ_4^2	σ_1^2
σ_4	σ_4	σ_2^2	τ_1	σ_3^2	τ_3	σ_1^2	τ_2	σ_4^2	I	σ_3	σ_2	σ_1
σ_4^2	σ_4^2	τ_3	σ_3	τ_2	σ_1	τ_1	σ_2	I	σ_4	σ_1^2	σ_3^2	σ_2^2
τ_1	τ_1	σ_4	σ_2^2	σ_3	σ_1^2	σ_2	σ_4^2	σ_1	σ_3^2	I	τ_3	τ_2
τ_2	τ_2	σ_2	σ_3^2	σ_1	σ_4^2	σ_4	σ_1^2	σ_3	σ_2^2	τ_3	I	τ_1
τ_3	τ_3	σ_3	σ_4^2	σ_4	σ_3^2	σ_1	σ_2^2	σ_2	σ_1^2	τ_2	τ_1	I